

## 1. Podstawy mechaniki kwantowej

Mechanika kwantowa (QM) jest teorią fizyczną opisującą z niezwykłą dokładnością świat mikroskopowy (w skalach atomów, jąder atomowych, cząstek elementarnych). W QM spotykamy się z wieloma „tajemniczymi” zjawiskami takimi jak superpozycja stanów, zasada nieoznaczoności i splątanie (korelacje inne niż klasyczne).

W dowolnej teorii fizycznej stosujemy matematykę jako niezawodny i użyteczny język służący przede wszystkim do logicznego, ilościowego i uniwersalnego opisu zjawisk. Jednakże sposób w jaki stosujemy matematykę w QM różni się całkowicie od sposobu stosowania jej do opisu świata makroskopowego. Ta różnica jest konsekwencją faktu, że większość własności układów kwantowych nie posiada określonych wartości a co za tym idzie stanów takich układów nie można reprezentować przy pomocy ciągów liczb rzeczywistych. W ten sposób opisujemy stany układów makroskopowych, dla których wartości wszystkich wielkości są dokładnie określone. Układy kwantowe cechuje nieredukowalna losowość: dokonując pomiarów (obserwacji) pewnej wielkości na układzie kwantowym będącym w pewnym określonym stanie możemy uzyskiwać rozmaite rezultaty, każdy z określonym prawdopodobieństwem. Podstawowe pytanie, na które odpowiada mechanika kwantowa jest następujące: **Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokonując pomiaru pewnej wielkości na układzie znajdującym się w danym stanie, otrzymamy jedną z jej możliwych wartości?**

Z operacyjnego punktu widzenia stan układu określa jaki możliwy wynik otrzymamy dokonując pomiaru wszystkich (niezależnych) wielkości fizycznych. W QM wynik każdego pomiaru pojawia się z pewnym prawdopodobieństwem, więc stan układu kwantowego formalnie moglibyśmy zdefiniować jako odwzorowanie przypisujące każdej niezależnej wielkości fizycznej prawdopodobieństwo otrzymania określonej wartości tej wielkości. W tradycyjnym formalizmie QM reprezentujemy każdy stan i każdą wielkość fizyczną oddzielnie a następnie wprowadzamy pewną zasadę (regułę Borna) pozwalającą wyznaczać odpowiednie prawdopodobieństwa.

Przedstawimy teraz postulaty mechaniki kwantowej.

- 1) Stan izolowanego układu kwantowego jest reprezentowany przez unormowany wektor  $|\psi\rangle$  będący elementem przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  (tzn. zespolonej przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym  $\langle \cdot | \cdot \rangle^1$ ). Jeśli  $|\psi_1\rangle$  i  $|\psi_2\rangle$  są stanami danego

---

<sup>1</sup> Iloczyn skalarny posiada następujące własności:  $\langle \psi | \phi \rangle \in \mathbb{C}$

- a) hermitowskość:  $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*$ , gdzie gwiazdka oznacza sprzężenie zespolone,
- b) liniowość względem drugiego argumentu:  $\langle \phi | (c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle) \rangle = c_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + c_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$ . Z punktów a) i b) wynika, że iloczyn skalarny jest antyliniowy względem pierwszego argumentu tzn.:  $\langle (c_1 |\phi_1\rangle + c_2 |\phi_2\rangle) | \psi \rangle = c_1^* \langle \phi_1 | \psi \rangle + c_2^* \langle \phi_2 | \psi \rangle$ .
- c) euklidesowość:  $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ , przy czym ten iloczyn skalarny jest równy zero jedynie dla wektora zerowego, który oznaczamy będziemy przez  $0$ . Wyrażenie  $\langle \psi | \psi \rangle$  nazywamy kwadratem długości (normy) wektora  $|\psi\rangle$ ,

układu, to dowolna ich kombinacja liniowa  $c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$  także jest możliwym stanem tego układu. Jest to tzw. zasada superpozycji stanów. Wynika ona z liniowości równania Schrödingera a jej konsekwencją jest interferencja charakterystyczna dla procesów kwantowych.

- 2) Dowolna wielkość fizyczna  $\mathcal{A}$  (obserwabla) jest reprezentowana przez operator hermitowski  $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^2$ .
- 3) Jedynymi możliwymi wynikami pomiarów wielkości  $\mathcal{A}$  są wartości własne operatora  $\hat{A}$ . Wartości własne  $(a_1, a_2, \dots)$  operatora  $\hat{A}$  wyznaczamy rozwiązując równanie własne tego operatora:  $\hat{A}|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$ . Wektor  $|\varphi\rangle$  nazywamy wektorem własnym operatora  $\hat{A}$  odpowiadającym jego wartości własnej  $a$ .<sup>3</sup>
- 4) Jeśli tuż przed pomiarem układ kwantowy znajduje się w stanie  $|\psi\rangle$ , to wykonując pomiar wielkości fizycznej  $\mathcal{A}$  na tym układzie nie jesteśmy w stanie odpowiedzieć na pytanie jaki wynik otrzymamy. Wynik nie jest zdeterminowany i w każdym takim pomiarze możemy otrzymać jedną spośród wartości własnych operatora  $\hat{A}$ . Prawdopodobieństwo otrzymania wyniku  $a_i$  określa tzw. reguła Borna. Brzmi ona następująco: Jeśli tuż przed pomiarem wielkości  $\mathcal{A}$  układ kwantowy znajdował się w stanie  $|\psi\rangle$ , to prawdopodobieństwo otrzymania wyniku  $a_i$ :  $\text{pr}(a_i|\psi)$  jest dane

---

<sup>2</sup> Hermitowskość operatora  $\hat{A}$  definiujemy wprowadzając operację sprzężenia hermitowskiego. Mianowicie operator sprzężony po hermitowsku  $\hat{A}^\dagger$  z operatorem  $\hat{A}$  określamy następująco:  $\langle\varphi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\hat{A}\varphi|\psi\rangle$ . Jeśli przy sprzężeniu hermitowskim operator nie ulega zmianie, to nazywamy go hermitowskim co zapisujemy  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ .

<sup>3</sup> Wszystkie wartości własne operatora hermitowskiego są rzeczywiste natomiast jego wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe. Jeśli pewnej wartości własnej  $a_i$  odpowiada  $n_i$  liniowo niezależnych wektorów własnych, to mówimy, że wartość własna  $a_i$  jest  $n_i$  - krotnie zdegenerowana. Zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających tej wartości własnej tworzy  $n_i$  wymiarową podprzestrzeń liniową  $\mathcal{H}_i$  przestrzeni  $\mathcal{H}$ . W podprzestrzeni  $\mathcal{H}_i$  zawsze możemy wybrać bazę ortonormalną  $\{|\varphi_i^\alpha\rangle, \alpha = 1, 2, \dots, n_i\}$  tzn. taką, że  $\langle\varphi_i^\alpha|\varphi_i^\beta\rangle = \delta^{\alpha\beta}$ . Operator hermitowski

$\hat{P}_i = \sum_{\alpha=1}^{n_i} |\varphi_i^\alpha\rangle\langle\varphi_i^\alpha|$  jest operatorem rzutowania ortogonalnego na podprzestrzeń  $\mathcal{H}_i$ . Zbiór wszystkich wektorów własnych operatora hermitowskiego  $\hat{A}$  tworzy bazę ortonormalną w przestrzeni  $\mathcal{H}$  co oznacza, że operator jednostkowy  $\hat{1}$  możemy przedstawić w postaci  $\hat{1} = \sum_{i=1} \hat{P}_i = \sum_{i=1} \sum_{\alpha=1}^{n_i} |\varphi_i^\alpha\rangle\langle\varphi_i^\alpha|$  natomiast operator  $\hat{A}$  posiada następujące rozwinięcie spektralne:  $\hat{A} = \sum_{i=1} a_i \sum_{\alpha=1}^{n_i} |\varphi_i^\alpha\rangle\langle\varphi_i^\alpha| = \sum_i a_i \hat{P}_i$ . Operatory rzutowe spełniają następującą własność ortogonalności  $\hat{P}_i \hat{P}_j = \delta_{ij} \hat{P}_i$ .

wzorem  $\text{pr}(a_i|\psi) = \frac{\langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n_i} |\langle \varphi_i^\alpha | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$ .<sup>4</sup> Reguła ta wyraża nieredukowalną

losowość zjawisk kwantowych. Zauważmy, że jeśli wektor stanu  $|\psi\rangle$  jest

unormowany ( $\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{\alpha=1}^{n_i} |\langle \varphi_i^\alpha | \psi \rangle|^2 = 1$ ) i jeśli wartość własna  $a_k$  nie jest

zdegenerowana, to  $\text{pr}(a_k|\psi) = |\langle \varphi_k | \psi \rangle|^2$ . Wielkość  $\langle \varphi_k | \psi \rangle$  nazywamy amplitudą prawdopodobieństwa przejścia ze stanu  $|\psi\rangle$  do stanu  $|\varphi_k\rangle$ . Jak widzimy w fizyce kwantowej amplitudy prawdopodobieństwa mają kluczowe znaczenie.

- 5) Na pytanie w jakim stanie znajduje się układ kwantowy tuż po pomiarze odpowiada następujący postulat Diraca - von Neumanna o redukcji wektora stanu.

Jeśli tuż przed pomiarem wielkości  $\mathcal{A}$  układ kwantowy znajdował się w stanie  $|\psi\rangle$  i wynikiem pomiaru jest wartość  $a_i$ , to tuż po pomiarze układ ten znajduje się w stanie własnym operatora  $\hat{A}$  odpowiadającym jego wartości własnej będącej wynikiem

pomiaru, tzn. w stanie  $|\psi_i\rangle = \frac{\hat{P}_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle}}$ .

Zatem proces pomiaru odgrywa ważną rolę: pozwala on ustalić wartość mierzonej wielkości a także odpowiedzieć na pytanie w jakim stanie znajdzie się układ kwantowy tuż po pomiarze. Pojawiająca się wartość obserwabli a także stan w jakim znajduje się układ tuż po pomiarze mają charakter losowy. O pomiarach nie musimy myśleć jako o przedsięwzięciach wykonywanych jedynie w laboratoriach. Do pomiaru dochodzi w przyrodzie za każdym razem, gdy układ kwantowy „zaznacza” swoje istnienie w świecie makroskopowym, dzięki czemu w losowy sposób, ustala się wartość odpowiedniej wielkości.

Pomiar, jak widzimy, w gwałtowny i nieodwracalny sposób zmienia stan układu usuwając z niego składowe leżące poza podprzestrzenią  $\mathcal{H}_i$ . Gdybyśmy szybko powtórzyli ten sam pomiar na układzie kwantowym, wówczas z całkowitą pewnością otrzymalibyśmy wartość  $a_i$  wielkości  $\mathcal{A}$ . Każdy stan własny operatora  $\hat{A}$  jest więc takim stanem, dla którego wartość wielkości  $\mathcal{A}$  jest w pełni określona.

Klasyczna teoria informacji jest sformułowana niezależnie od jakichkolwiek pomiarów. Jest tak, gdyż stan rejestru każdego urządzenia klasycznego jest zawsze dokładnie określony. W informatyce kwantowej mamy do czynienia z przekształceniami stanów kwantowych, dla których wartości interesujących wielkości nie są określone dopóki nie zostanie

---

<sup>4</sup> Zauważmy, że wartość prawdopodobieństwa  $\text{pr}(a_i|\psi)$  nie ulegnie zmianie jeśli wektor stanu  $|\psi\rangle$  zastąpimy wektorem  $|\psi'\rangle = c|\psi\rangle$ , gdzie  $c$  jest dowolną, różną od zera, liczbą zespoloną. Zatem wektory  $|\psi\rangle$  i  $|\psi'\rangle = c|\psi\rangle$  określają ten sam stan układu kwantowego.

przeprowadzony pomiar. A zatem w informatyce kwantowej pomiary odgrywają zasadniczą rolę. Przez pomiar możemy rozumieć rzutowanie wektora stanu układu kwantowego na odpowiednie wektory własne (wektory bazy) odpowiadające wartości własnej tej obserwabli, którą właśnie mierzymy.

Zauważmy, że obserwabla  $\mathcal{A}$  jest zmienną losową i jej wartość średnia wyznaczona podczas wielokrotnego mierzenia tej wielkości na układzie kwantowym w (unormowanym) stanie  $|\psi\rangle$  wynosi:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\psi = \sum_{i=1} a_i \text{pr}(a_i | \psi) = \sum_{i=1} a_i \langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle = \langle \psi | \left( \sum_{i=1} a_i \hat{P}_i \right) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Dla zmiennej losowej  $\mathcal{A}$  możemy także mówić o średnim odchyleniu standardowym

$$\Delta \mathcal{A}_\psi = \sqrt{\left\langle \left( \mathcal{A} - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi \right)^2 \right\rangle_\psi},$$

które jest miarą rozrzutu wyników pomiarowych wokół wartości

średniej. W fizyce kwantowej wielkość tę nazywamy nieoznaczonością obserwabli  $\mathcal{A}$  w stanie  $|\psi\rangle$ . Łatwo zauważyć że

$$\Delta \mathcal{A}_\psi^2 = \left\langle \psi \left| \left( \hat{A} - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi \hat{1} \right)^2 \right| \psi \right\rangle = \left\langle \left( \hat{A} - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi \hat{1} \right) \psi \left| \left( \hat{A} - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi \hat{1} \right) \right| \psi \right\rangle = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2$$

a zatem nieoznaczoność wielkości  $\mathcal{A}$  jest równa zero jedynie dla jej wektorów własnych.

Jeśli  $\mathcal{B}$  jest inną obserwabłą, której odpowiada operator  $\hat{B}$ , to można pokazać, że iloczyn nieoznaczoności tych wielkości (w stanie  $|\psi\rangle$ ) spełnia nierówność

$$\Delta \mathcal{A}_\psi \Delta \mathcal{B}_\psi \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \psi \left| i \left[ \hat{A}, \hat{B} \right] \right| \psi \right\rangle \right|^5$$

- czyli iloczyn nieoznaczoności dwóch wielkości mierzonych

$\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  jest niemniejszy niż połowa wartości bezwzględnej ze średniej operatora  $i \left[ \hat{A}, \hat{B} \right]$  w stanie  $|\psi\rangle$ . Jest to słynna zasada nieoznaczoności Heisenberga. Wynika z niej, że im lepiej jest określona w danym stanie wartość jednej z obserwabli tym gorzej określona jest wartość drugiej spośród obserwabli niezgodnych.

- 6) Powinniśmy jeszcze odpowiedzieć na pytanie w jaki sposób ewoluują stany izolowanego układu kwantowego. Ewolucja taka jest wyznaczona przez rozwiązanie

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle,$$

tutaj  $\hat{H}$  jest operatorem energii całkowitej układu kwantowego, czyli tzw.

hamiltonianem, natomiast  $\hbar = \frac{h}{2\pi} \cong 1.0545 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6,5821 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$  jest stałą

<sup>5</sup>  $\left[ \hat{A}, \hat{B} \right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  nazywamy komutatorem operatorów  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$ . Jest on miarą nieprzemienności mnożenia operatorów. Okazuje się, że w przestrzeni  $\mathcal{H}$  układu kwantowego istnieje baza utworzona z wektorów, które są wektorami własnymi zarówno operatora  $\hat{A}$  jak i  $\hat{B}$  wtedy i tylko wtedy, gdy ich komutator  $\left[ \hat{A}, \hat{B} \right]$  znika. Takie operatory nazywamy zgodnymi albo współmierzalnymi. Natomiast te obserwabli, którym odpowiadają operatory niekomutujące, nazywamy niezgodnymi.

Plancka  $h$  podzieloną przez  $2\pi$ . Formalne rozwiązanie równania Schrödingera ma postać  $|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right]|\psi(0)\rangle$ . Stan  $|\psi(0)\rangle$  jest stanem początkowym układu

kwantowego natomiast  $\hat{U}(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right]$ , jest unitarnym operatorem ewolucji.

Unitarność oznacza, że  $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{1}$ . Zatem ewolucja stanów izolowanego układu kwantowego jest deterministyczna i odwracalna. Nieodwracalność i indeterminizm w QM pojawia za każdym razem, gdy dokonujemy pomiaru na układzie kwantowym doprowadzając do oddziaływania takiego układu z przyrządem pomiarowym. Dzięki pomiarowi dowiadujemy się jaką wartość posiada pewna wielkość fizyczna i w jakim stanie układ znajduje się tuż po pomiarze. Jak widać proces pomiaru odgrywa znaczącą (aktywną) rolę w fizyce kwantowej.

**Każde przekształcenie stanu izolowanego układu kwantowego jest realizowane przez pewien operator unitarny.**

Bardzo często mamy do czynienia ze złożonymi układami kwantowymi – a więc takimi, które składają się co najmniej z dwóch różnych części. Konieczna jest zatem odpowiedź na pytanie w jaki sposób opisywać stany takich układów kwantowych. Zanim do tego przystąpimy omówimy pewne szczegóły techniczne dotyczące przestrzeni wektorowych. Jeśli przestrzeń  $\mathcal{H}$  jest skończenie wymiarowa, tzn. jej wymiar wynosi  $d$ , to możemy w niej wprowadzić bazę ortonormalną  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_d\rangle$ . Ortonormalność bazy oznacza, że każdy jej wektor jest unormowany i wektory te są parami prostopadłe tzn.  $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$  dla  $i, j = 1, 2, \dots, d$ .

Dowolny wektor możemy w tej bazie rozłożyć na składowe  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |\varphi_i\rangle$ . Łatwo zauważyć,

że  $c_i = \langle\varphi_i|\psi\rangle$  a więc, że  $i$ -ta składowa wektora  $|\psi\rangle$  jest równa amplitudzie

prawdopodobieństwa przejścia układu ze stanu  $|\psi\rangle$  do stanu bazy  $|\varphi_i\rangle$ . Łatwo też zauważyć,

iż iloczyn skalarny dwóch wektorów  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |\varphi_i\rangle$  i  $|\varphi\rangle = \sum_{j=1}^d w_j |\varphi_j\rangle$  jest równy

$\langle\psi|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i^* w_i$  a zatem kwadrat długości wektora  $|\psi\rangle$  dany jest wzorem:  $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d |c_i|^2$ . Z

każdym wektorem  $|\psi\rangle$  możemy związać odpowiadający mu bra-wektor  $\langle\psi|$ , który jest odwzorowaniem liniowym przyporządkowującym dowolnemu wektorowi  $|\varphi\rangle$  liczbę

zespoloną  $\langle\psi|\varphi\rangle$ . Łatwo zauważyć, że jeśli  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |\varphi_i\rangle$ , to  $\langle\psi| = \sum_{i=1}^d c_i^* \langle\varphi_i|$ . Ponieważ dla

dowolnego wektora  $|\psi\rangle$  mamy  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d |\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|\psi\rangle$ , więc  $\hat{1} = \sum_{i=1}^d |\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|$  jest rozkładem

operatora jednostkowego w bazie ortonormalnej  $\{|\varphi_i\rangle \mid i=1, 2, \dots, d\}$ . Wykorzystując mnożenie macierzy rozkład wektora w wybranej bazie możemy przedstawić w postaci

$$|\psi\rangle = [|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_d\rangle] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_d \end{bmatrix}.$$

A zatem każdy wektor w ustalonej bazie jest reprezentowany przez kolumnę utworzoną z

jego składowych  $|\psi\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$ . Dowolny bra-wektor  $\langle\psi|$  możemy zapisać w postaci

iloczynu:  $\langle\psi| = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_d^*) \begin{bmatrix} \langle\varphi_1| \\ \langle\varphi_2| \\ \vdots \\ \langle\varphi_d| \end{bmatrix}$ . Jak widać w ustalonej bazie bra-wektor jest

reprezentowany przez wiersz utworzony ze sprzężonych kolejnych składowych

odpowiadającego mu wektora  $\langle\psi| \leftrightarrow (c_1^*, c_2^*, \dots, c_d^*)$ . O bra-wektorze możemy zatem myśleć,

że jest on sprzężeniem hermitowskim wektora  $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$ .

Przekonamy się teraz, że z operatorem liniowym, w ustalonej bazie, związana jest zespolona macierz kwadratowa. Rzeczywiście zauważmy, że obrazem i-tego wektora bazowego  $\hat{A}|\varphi_i\rangle$  jest pewien wektor z przestrzeni  $\mathcal{H}$ , możemy go więc rozłożyć w wybranej bazie:

$\hat{A}|\varphi_i\rangle = \sum_{j=1}^d |\varphi_j\rangle A_{ji}$ . Kolumna  $\begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{di} \end{bmatrix}$  jest utworzona z kolejnych składowych obrazu i-tego

wektora bazowego. Oczywiście  $A_{ij} = \langle\varphi_i|\hat{A}|\varphi_j\rangle$  i jest to tzw. element macierzowy operatora

$\hat{A}$  (w ustalonej bazie) – jest to element owej macierzy z i-tego wiersza i j-tej kolumny a więc jest to i-ta składowa obrazu j-tego wektora bazy. Zauważmy, że wykorzystując liniowość

operatora  $\hat{A}$  obraz dowolnego wektora  $|\psi\rangle$  możemy rozłożyć w bazie w następujący sposób:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^d c_j |\varphi_j\rangle\right) = \sum_{j=1}^d c_j \hat{A}|\varphi_j\rangle = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d |\varphi_i\rangle A_{ij} c_j = (|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_d\rangle) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \dots & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

macierz  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \dots & A_{dd} \end{bmatrix}$  nazywamy macierzą operatora  $\hat{A}$  w ustalonej bazie.

Pamiętając, że  $c_j = \langle \varphi_j | \psi \rangle$  oraz, że  $A_{ij} = \langle \varphi_i | \hat{A} | \varphi_j \rangle$  widzimy, że w ustalonej bazie operator  $\hat{A}$  możemy zapisać w postaci  $\hat{A} = \sum_{i,j=1}^d A_{ij} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_j| = \sum_{i,j=1}^d |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i | \hat{A} | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j|$ .

Widzimy więc, że aby odpowiedzieć na pytanie jaki jest obraz dowolnego wektora w odwzorowaniu  $\hat{A}$  wystarczy znajomość obrazów wszystkich wektorów bazy.

Operator  $\hat{A}$  jest hermitowski jeśli odpowiadająca mu w wybranej bazie macierz jest hermitowska tzn., gdy  $A = A^\dagger$  tzn., gdy elementy macierzowe spełniają warunek  $A_{ij} = A_{ji}^*$ .

Operator  $\hat{U}$  jest unitarny, jeśli odpowiadająca mu macierz  $U$  spełnia warunek  $U^\dagger U = 1$ , co możemy wyrazić przez elementy macierzowe w następujący sposób:  $\sum_{k=1}^d U_{ki}^* U_{kj} = \delta_{ij}$ .

Zauważmy, że z każdej bazy ortonormalnej w  $\mathcal{H}$  odpowiada pewien operator hermitowski

$\hat{B} = \sum_{i=1}^d b_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$ , którego wartości własne to liczby rzeczywiste  $b_i$ , natomiast każdy

operator  $\hat{P}_i = |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$  rzutowania ortonormalnego na podprzestrzeń wyznaczoną przez wektor bazowy  $|\varphi_i\rangle$  możemy potraktować jako „pytanie”: czy układ kwantowy będący w unormowanym stanie  $|\psi\rangle$  może przejść do stanu  $|\varphi_i\rangle$ . Prawdopodobieństwo, że tak się stanie wynosi oczywiście  $\langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle = \langle \psi | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \psi \rangle = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2$ .

Jesteśmy już przygotowani do sformułowania postulatu mówiącego w jaki sposób należy opisywać stany złożonego, izolowanego układu kwantowego.

- 7) Jeśli układ kwantowy składa się z dwóch podukładów przy czym przestrzenie stanów tych podukładów oznaczymy odpowiednio przez  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ , to przestrzeń stanów  $\mathcal{H}$  układu złożonego jest iloczynem tensorowym obydwu tych przestrzeni tzn.
- $$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2.$$

Dowolny taki stan układu złożonego, który możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle$ , gdzie  $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$  i  $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$  nazywamy stanem **separowalnym**. Stany, które nie mogą być przedstawione w tej postaci nazywamy stanami **splątanyymi**. Powiedzmy, że przestrzenie  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  są odpowiednio  $d_1$  i  $d_2$  wymiarowe. Niech wektory  $(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_{d_1}\rangle)$  tworzą bazę ortonormalną w  $\mathcal{H}_1$  natomiast wektory  $(|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, \dots, |\chi_{d_2}\rangle)$  niech tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni  $\mathcal{H}_2$ . Dowolny wektor należący do przestrzeni  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  możemy przedstawić w postaci

$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{a=1}^{d_2} c_{ia} |\varphi_i\rangle |\chi_a\rangle$ . Zauważmy, że dowolny wektor separowalny możemy

scharakteryzować podając  $d_1 + d_2$  liczb zespolonych, natomiast aby scharakteryzować dowolny wektor z przestrzeni  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  musimy podać  $d_1 \cdot d_2$  liczb zespolonych.

Widzimy zatem, że przestrzenie z dużymi wymiarami zawierają o wiele więcej stanów splątanych niż separowalnych. Splątanie jest, jak się okazuje, nowym czysto kwantowym, zasobem informatyki kwantowej. Istnieje proste kryterium pozwalające rozstrzygnąć czy dany stan jest splątany czy separowalny. Otóż jeśli macierz  $CC^\dagger$  posiada tylko jedną

różną od zera wartość własną, to stan  $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{a=1}^{d_2} c_{ia} |\varphi_i\rangle |\chi_a\rangle$  jest separowalny, gdy tak nie jest to stan ten jest splątany ( tutaj macierz  $C$  jest utworzona ze składowych  $c_{ia}$  wektora  $|\Psi\rangle$  ).

Przestrzeń  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  jest oczywiście przestrzenią z iloczynem skalarnym: jeśli

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{a=1}^{d_2} c_{ia} |\varphi_i\rangle |\chi_a\rangle \text{ i } |\Phi\rangle = \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{b=1}^{d_2} w_{jb} |\varphi_j\rangle |\chi_b\rangle, \text{ to } \langle\Psi|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{a=1}^{d_2} c_{ia}^* w_{ia}.$$

Możemy także rozważać odwzorowanie liniowe  $\hat{\Omega}: \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Elementy macierze takiego odwzorowania definiujemy następująco:

$$\hat{\Omega}|\varphi_i\rangle |\chi_a\rangle = \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{b=1}^{d_2} |\varphi_j\rangle |\chi_b\rangle \Omega_{jb,ia}. \text{ Jeśli } \hat{A} \text{ i } \hat{B} \text{ są operatorami liniowymi określonymi na}$$

przestrzeni  $\mathcal{H}_1$  i  $\mathcal{H}_2$  odpowiednio, to możemy zdefiniować operator  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  będący ich iloczynem tensorowym. Mianowicie

$$\hat{A} \otimes \hat{B} |\varphi_i\rangle |\chi_a\rangle = \hat{A} |\varphi_i\rangle \hat{B} |\chi_a\rangle = \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{b=1}^{d_2} |\varphi_j\rangle |\chi_b\rangle A_{ji} B_{ba}. \text{ Zatem } (\hat{A} \otimes \hat{B})_{jb,ia} = A_{ji} B_{ba}.$$

Jeśli bazę w przestrzeni  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  uporządkujemy w następujący sposób:

$$\left( |\varphi_1\rangle |\chi_1\rangle, |\varphi_1\rangle |\chi_2\rangle, \dots, |\varphi_1\rangle |\chi_{d_2}\rangle, |\varphi_2\rangle |\chi_1\rangle, |\varphi_2\rangle |\chi_2\rangle, \dots, |\varphi_2\rangle |\chi_{d_2}\rangle, \dots, |\varphi_{d_1}\rangle |\chi_1\rangle, |\varphi_{d_1}\rangle |\chi_2\rangle, \dots, |\varphi_{d_1}\rangle |\chi_{d_2}\rangle \right)$$

to operatorowi  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  w tej bazie odpowiada macierz kwadratowa  $d_1 d_2 \times d_1 d_2$  będąca iloczynem Kroneckera macierzy  $A$  i  $B$ , który definiujemy następująco:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1d_1}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2d_1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{d_11}B & A_{d_12}B & \dots & A_{d_1d_1}B \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że w ortodoksyjnym podejściu do mechaniki kwantowej mamy do czynienia z dwoma zasadniczo różnymi sposobami w jakie zmieniają się stany układów kwantowych. Stany izolowanego układu kwantowego ewoluują zgodnie deterministycznym równaniem



Schrödingera, natomiast podczas pomiaru następuje nieciągła i losowa redukcja (kolaps) wektora stanu. Jest to proces nieodwracalny. Pojawia się tu wiele pytań, mianowicie:

- Co dokładnie rozumiemy przez pomiar? Jak szybko się on dokonuje? Co dokładnie składa się na aparaturę pomiarową?
- Czy w proces pomiaru musi być zaangażowany człowiek? Czy konieczna jest jakaś doza świadomości albo zdolność kodowania informacji?
- Czy pomiar musi być makroskopowy a jeśli tak to jak bardzo makroskopowy?
- Jak to się dzieje, że funkcja falowa ulega redukcji w tak drastyczny sposób i jak to możliwe, że „pomiar” w losowy sposób wybiera jedną spośród wielu możliwości?
- Co dzieje się z tymi wszystkimi możliwościami, które były „ukryte” w wektorze stanu a których nie zaobserwowaliśmy?

Można próbować odpowiadać, że w procesie pomiaru układ kwantowy wchodzi w oddziaływanie z otoczeniem makroskopowym, które podlega losowym zaburzeniom. Powiedzmy, że tym otoczeniem jest wiązka fotonów, których zachowanie jest tak samo nieprzewidywalne jak zachowanie kropli w strugach deszczu. Z powodu zaburzeń, ze strony środowiska, superpozycja różnych stanów w wektorze stanu ulega zniszczeniu co prowadzi do pojawienia się określonego, chociaż nieprzewidywalnego wyniku pomiaru. Ten proces nazywamy dekoherencją. To tak jakby w jakiś nieprzewidywalny sposób z szumu tła wydobyła się jedna czysta nuta. Jednak tutaj pojawia się pytanie: jeśli deterministyczne równanie Schrödingera jest równaniem fundamentalnym i opisuje ewolucję czasową nie tylko układu kwantowego lecz także układu pomiarowego i uczonego fizyka dokonującego pomiaru, to wyniki pomiarów w zasadzie nie powinny być nieprzewidywalne. I znów stajemy przed pytaniem: w jaki sposób w mechanice kwantowej pojawiają się prawdopodobieństwa?

Niels Bohr w latach dwudziestych udzielił odpowiedzi na to pytanie mówiąc, że w procesie pomiaru dochodzi do redukcji wektora stanu, przy czym tego procesu redukcji nie można opisać przy pomocy formalizmu mechaniki kwantowej i jest on nieprzewidywalny. Obecnie taka odpowiedź w wielu uczonych budzi sprzeciw. Przecież nie ma sposobu pozwalającego wyznaczyć granicę między tymi układami, do których można stosować formalizm kwantowy a tymi do których już nie można go stosować.

Obecnie najbardziej rozpowszechnione są dwa podejścia do mechaniki kwantowej: jedno z nich można nazwać realistycznym a drugie instrumentalnym. Żadne z nich nie jest jednak zadowolające.

Podejście instrumentalne cechuje interpretację kopenhaską. Zgodnie z tą interpretacją zamiast wyznaczać granicę obszaru, poza którym nie można stosować mechaniki kwantowej, jej wyznawcy utrzymują, że mechanika kwantowa nie jest sposobem opisu rzeczywistości. Wektory stanu nie reprezentują żadnej rzeczywistości fizycznej typu cząstka czy pole. Są jedynie narzędziami służącymi do wyznaczania tego co możemy zaobserwować i z jakim prawdopodobieństwem.

Problem z takim podejściem polega nie tylko na tym, że rezygnuje ono z naturalnego celu nauki jakim jest wyjaśnianie tego co się w istocie dzieje. Jest to bardzo zasmucająca kapitulacja. W ramach tego instrumentalnego podejścia musimy przyjąć w charakterze fundamentalnych praw przyrody zasady w jaki sposób powinniśmy wykorzystywać wektory stanu abyśmy mogli otrzymywać prawdopodobieństwa pojawiania się poszczególnych wyników pomiarów wykonywanych przez ludzi. W ten sposób czynnik ludzki pojawia się w prawach przyrody na bardzo fundamentalnym poziomie. Eugene Wigner uważał, że istotnie „bez odwoływania się do świadomości nie można sformułować praw mechaniki kwantowej w sposób niesprzeczny”.

Jak widzimy podejście instrumentalne ignoruje punkt widzenia zgodnie, z którym rzeczywistością rządzą obiektywne prawa fizyki, które kontrolują zachowanie człowieka w podobny sposób jak kontrolują dowolne inne procesy. Chcielibyśmy poznać związek człowieka z przyrodą wychodząc z takich praw fizyki, które nie odwołują się do czynnika ludzkiego w jawny sposób. Być może taki program jest zbyt ambitny i trzeba będzie z niego zrezygnować ale jeszcze na to nie czas.

Niektórzy fizycy, którzy są instrumentalistami twierdzą, że prawdopodobieństwa jakie wyznaczają na podstawie znajomości wektorów stanu są obiektywne i nie zależą od tego czy ktokolwiek dokonuje pomiaru. Wydaje się jednak, że to stwierdzenie nie jest logiczne. W mechanice kwantowej prawdopodobieństwa te nie istnieją dopóki eksperymentator nie zdecyduje co mianowicie będzie mierzył. W przeciwieństwie do fizyki klasycznej taki wybór musi być dokonany, gdyż nie wszystkie wielkości mogą mieć jednocześnie określone wartości.

Te trudności można częściowo obejść w ramach realistycznego podejścia do mechaniki kwantowej. Tym razem wektor stanu i jego deterministyczna ewolucja są traktowane jak obiekty z realnej rzeczywistości. Pojawiają się jednak inne trudności.

Z realistycznego podejścia wynika bardzo dziwna konsekwencja po raz pierwszy rozpatrzona przez Hugh Everetta w 1957 roku. Zgodnie z podejściem realistycznym, gdy dokonujemy pomiaru wówczas wektor stanu: układu kwantowego, przyrządu pomiarowego i nas samych ulega zmianie zgodnie z deterministycznym równaniem Schrödingera, jednak w rezultacie ich oddziaływania w trakcie procesu pomiarowego, wektor stanu staje się superpozycją zawierającą wektory stanu odpowiadające wszystkim możliwym do uzyskania w tym pomiarze wynikom. Ale my uzyskujemy konkretny wynik pomiaru a zatem wszystkie składowe odpowiadające innym wynikom wędrują do innych (równoległych) wszechświatów.

Takie rozszczepienie wszechświatów zachodzi za każdym razem, gdy dowolny obiekt makroskopowy dokonuje wyboru stanów kwantowych.

Przyszłość takiego ciągle rozszczepiającego się multiświata jest oczywiście bardzo niepewna. W tym podejściu jest jeszcze jedna bardzo nieprzyjemna okoliczność. Funkcja falowa multiświata ewoluuje zgodnie z deterministycznym równaniem Schrödingera. Możemy wprawdzie mówić o prawdopodobieństwie pojawienia się danego wyniku jako o stosunku liczby tych przypadków, w których wynik ten się pojawia do liczby wszystkich powtarzanych w identyczny sposób pomiarów przeprowadzanych w jednym ze światów. Jednakże prawa, które wyznaczają obserwowane prawdopodobieństwa powinny wynikać z deterministycznej ewolucji całego multiświata. Gdyby tak nie było musielibyśmy przyjąć dodatkowe założenia o tym co się dzieje podczas przeprowadzania pomiaru a to przywiódłoby nas z powrotem do problemów podejścia instrumentalnego.

W ramach podejścia realistycznego były podejmowane próby wyprowadzenia takich reguł jak reguła Borna jednak próby te nie zakończyły się sukcesem.

Nielokalność związana ze splątaniem kwantowym jest innym wyzwaniem dla podejścia realistycznego.

**Problemy związane z pomiarami sugerują, że teorię kwantową należy zmienić. Mechanika kwantowa tak znakomicie pracuje na poziomie atomów, że dowolna nowa teoria powinna być praktycznie nieodróżnialna o tradycyjnej mechanice kwantowej na poziomie tak małych obiektów. Jednak nowa teoria może być skonstruowana w taki sposób, że superpozycja stanów opisujących „duże” obiekty takie jak np. przyrządy pomiarowe, nawet wtedy, gdy są one izolowane ulega szybkiemu spontanicznemu kolapsowi, przy którym prawdopodobieństwa zmieniają się w taki sposób aby odpowiadały one tym jakie uzyskujemy w mechanice kwantowej.**



### Prosta wersja nierówności Bella

Aby lepiej sobie zdać sprawę ze znaczenia stanów splątanych rozważmy prostą wersję nierówności Bella. Rozpocznijmy od pewnej zmyślonej opowieści wziętej ze świata klasycznego, która posłuży do lepszego zrozumienia niezwykłości korelacji między stanami splątanymi.

Wyobraźmy sobie następującą bardzo prostą grę, w której uczestniczą dwójce graczy Alicja i Bob. Gra, zorganizowana przez dowcipnych biznesmenów, polega na tym, że każdemu z uczestników **na osobności** zadaje się jedno z trzech pytań, które oznaczymy literami A, B, C. Uczestnicy **w chwili zadawania pytań nie mogą się ze sobą komunikować** – znajdują się w różnych pomieszczeniach. Na każde z zadanych pytań możliwe są dwie odpowiedzi: „tak” (+) lub „nie” (-). Po udzieleniu odpowiedzi gracze spotykają się na moment i po chwili gra rozpoczyna się od nowa. Uczestnicy gry wygrywają jeśli ustalą taki sposób udzielania odpowiedzi, aby odpowiedzi obydwójga graczy **na te same** pytania zawsze były takie same. Gracze nie wiedzą wcześniej, które z pytań będzie im zadane – pytanie dla każdego z graczy **jest losowane niezależnie**. Przed każdą kolejną pytań Alicja i Bob muszą się spotkać aby wspólnie obmyślić sposób udzielania odpowiedzi. Jest oczywiste, że w sytuacji braku wiedzy na temat tego jakie pytanie będzie zadane każdemu z graczy, oraz w sytuacji niemożności dowiedzenia się od partnera o zadanym mu pytaniu, jedyne co mogą zrobić Alicja i Bob, to **z góry ustalić swoje odpowiedzi na wszystkie pytania**, aby mieć pewność, że ich odpowiedzi na te same pytania będą się zgadzać. Mogą się oni na przykład umówić, że na pytanie A odpowiedzą „nie” (-), na pytanie B „tak” (+), na pytanie C „nie” (-); umowę tę w skrócie zapiszemy: (- + -). Istnieje oczywiście  $2^3 = 8$  możliwych strategii udzielania odpowiedzi przez oboje graczy, z których każdą możemy przedstawić w postaci trójki takiej jak tu wypisana. Przed każdym pytaniem gracze mogą wybrać nową strategię. Jeśli są leniwi, to na początku mogą wybrać jedną z nich i cały czas ją stosować, lecz aby nie ograniczać im pola manewru założymy, że zawsze mogą się zdecydować na zmianę strategii. Podkreślimy – nie ma innego sposobu wywiązania się z postawionego zadania jak tylko przez ustalenie dokładnych odpowiedzi **na wszystkie trzy pytania przed ich zadaniem**.

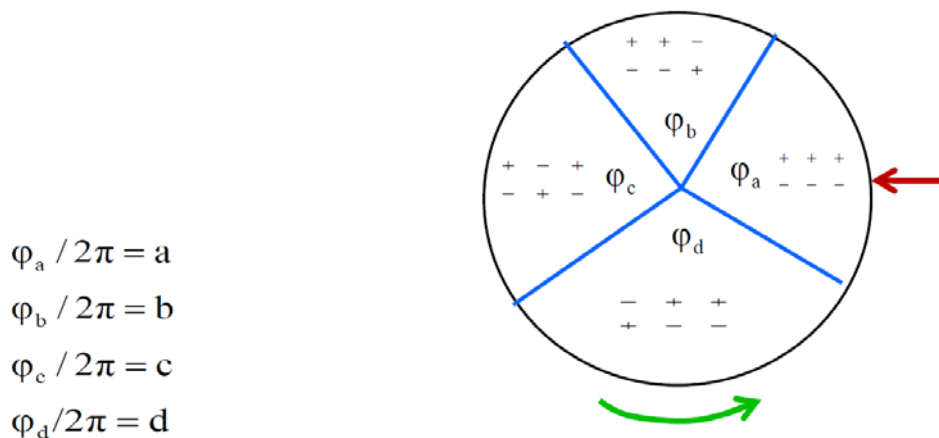
Dowcipni organizatorzy wprowadzają teraz znaczące utrudnienie do gry. Oprócz wymogu zgodności odpowiedzi na te same pytania narzucają warunki dotyczące odpowiedzi w sytuacji gdy Alicji i Bobowi zadano **różne pytania**. To znaczy organizatorzy żądają: gdy Alicja otrzyma

pytanie A i Bob pytanie B ich odpowiedzi mają się różnić średnio w  $\frac{1}{4}$  przypadków; taki sam wymóg stawiają odnośnie pytań B i C, natomiast w przypadku pytań A i C odpowiedzi mają się różnić w  $\frac{3}{4}$  przypadków. Zastanówmy się jak Alicja i Bob mogliby się wywiązać z postawionego im zadania. Teraz oczywiście nie mogą stosować strategii „leniwej” – wtedy bowiem ich odpowiedzi na pytania mieszane (różne) byłyby również ustalone. Zatem muszą łączyć wszystkie strategie w odpowiednich proporcjach. Każda dopuszczalna sekwencja odpowiedzi musi mieć przypisaną pewną względną częstość występowania. Wszystkie strategie jakie mogą zastosować Alicja i Bob przedstawiamy poniżej:

Numer strategii	I	II	III	IV
Typ strategii	+++ ---	++- --+	+ - + - + -	- + + + - -
Prawdopodobieństwo	a	b	c	d

Symbole a, b, c, d oznaczają prawdopodobieństwo wystąpienia poszczególnej strategii, zatem  $a + b + c + d = 1$ .

W powyższym zestawieniu łącznie potraktowaliśmy te strategie, które są swoimi „odbiciami lustrzanymi”, gdyż są one nierozróżnialne względem sformułowanego problemu. Alicja i Bob mogą postąpić następująco: za pomocą pewnego mechanizmu losującego, **zastosowanego przed każdą kolejką pytań**, muszą wylosować jedną z 4 – ech możliwości udzielenia odpowiedzi.



Problem polega na obliczeniu jakie wartości muszą przyjmować te cztery prawdopodobieństwa aby był spełniony warunek postawiony przez organizatorów gry. Zaczniemy od wymogu dotyczącego odpowiedzi na pytania A i B. Jak widzimy, w przypadku strategii III i IV, odpowiedzi na pytania A i B będą różne. Niech  $P(A, B)$  oznacza prawdopodobieństwo, że odpowiedzi na pytania A i B są różne. Oczywiście z reguły Bayesa wynika, że  $P(A, B) = c + d$ . Niech  $P(B, C)$  oznacza, że odpowiedzi na pytania B i C są różne – odpowiadają im strategię II i III, zatem  $P(B, C) = b + c$ . W końcu niech  $P(A, C)$  oznacza prawdopodobieństwo, że odpowiedzi na pytania A i C są różne – odpowiadają im strategię II i IV, zatem  $P(A, C) = b + d$ .

Zauważmy, że  $P(A, B) + P(B, C) = b + d + 2c = P(A, C) + 2c$ .

Ponieważ  $0 \leq c \leq 1$ , więc otrzymujemy następującą nierówność:

$$P(A, B) + P(B, C) \geq P(A, C).$$

Jest to tzw. nierówność **Bella – Wignera**.

Nierówność tę wyprowadziliśmy przy założeniu, że **odpowiedzi na wszystkie pytania A, B, C są znane graczom przed momentem ich zadawania** (co odpowiada istnieniu zmiennych ukrytych albo inaczej temu, iż własności obiektów fizycznych są dobrze określone przed wykonaniem jakiegokolwiek pomiaru – takie założenie nazywamy realizmem) i że **gracze nie komunikują się ze sobą w momencie udzielania odpowiedzi** (co jest równoważne z żądaniem lokalności (separowalności), czyli z żądaniem niezależności układów między którymi nie doszło do żadnego fizycznego oddziaływania).

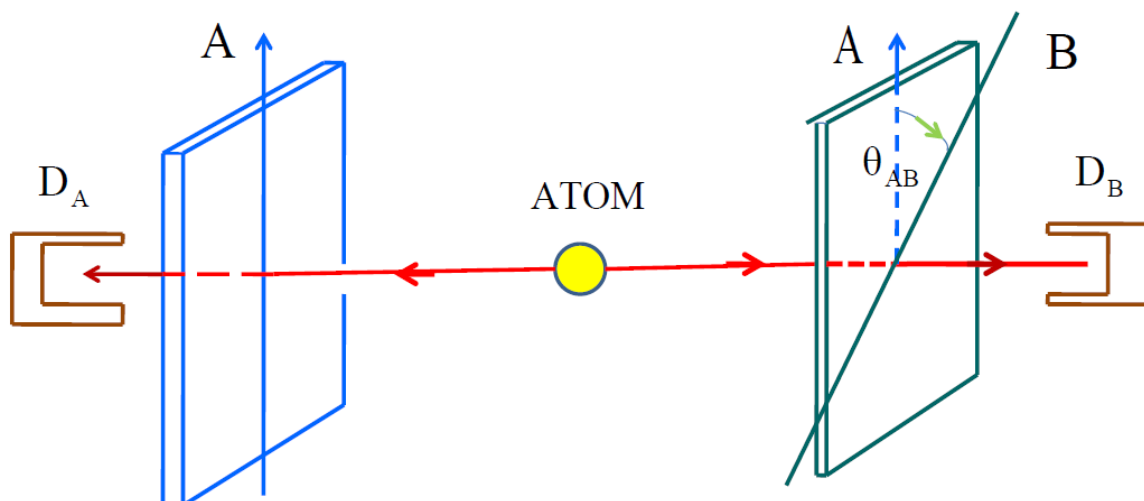
Widzimy, że Alicja i Bob nie mogą z tej gry wyjść zwycięsko, gdyż, jak teraz rozumiemy, złośliwi organizatorzy postawili warunki  $P(A, B) = 1/4$ ,  $P(B, C) = 1/4$ ,  $P(A, C) = 3/4$ .

Aby wygrać Alicja i Bob musieliby złamać reguły gry i w jakiś sekretny sposób porozumiewać się ze sobą (np. telepatycznie) w chwili, gdy znajdują się w oddzielnych pomieszczeniach. Gdyby Alicja informowała Boba o tym jakie pytania są jej zadawane, wtedy Bob w łatwy sposób mógłby tak dobierać odpowiedzi aby sprostać wymogom postawionym przez organizatorów.

W przyrodzie istnieją obiekty, które potrafią wygrać z organizatorami opisanej gry. Jako przykład omówimy parę fotonów występujących w stanie splątany. Fotony takie powstają w wyniku kaskadowego przejścia między powłokami pewnych odpowiednio wzbudzonych atomów. Mianowicie fotony te znajdują się w splątany stan polaryzacyjny:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_\theta\rangle|\uparrow_\theta\rangle + |\leftrightarrow_\theta\rangle|\leftrightarrow_\theta\rangle)$$

gdzie pierwszy stan dotyczy fotonu biegnącego w lewo, a drugi fotonu biegnącego w prawo, natomiast stany  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\leftrightarrow\rangle$  oznaczają polaryzację wertykalną i horyzontalną odpowiednio. Przy czym:  $|\uparrow_\theta\rangle = \cos\theta|\uparrow\rangle + \sin\theta|\leftrightarrow\rangle$ ,  $|\leftrightarrow_\theta\rangle = -\sin\theta|\uparrow\rangle + \cos\theta|\leftrightarrow\rangle$ .



Fotony po opuszczeniu atomu znajdują się w splątany stan polaryzacji

$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_\theta\rangle|\uparrow_\theta\rangle + |\leftrightarrow_\theta\rangle|\leftrightarrow_\theta\rangle)$  a więc takim, że polaryzacja żadnego z nich nie jest określona ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

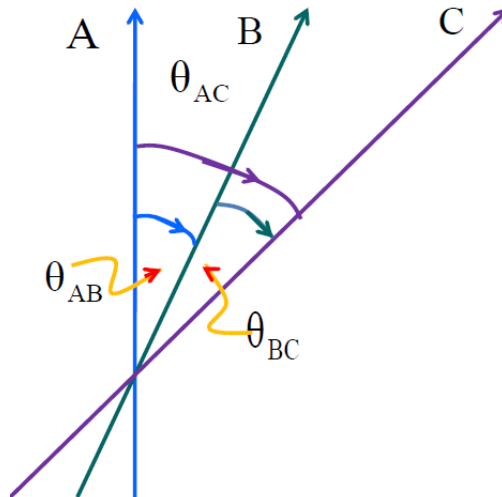
Zapytajmy jakie jest prawdopodobieństwo, że liczniki  $D_A$  i  $D_B$  dadzą różne odpowiedzi tzn., gdy lewy licznik zadziała i prawy nie zadziała i na odwrót. Prawdopodobieństwo, że zadziała lewy licznik wynosi oczywiście  $\frac{1}{2}$ . Jeśli lewy licznik zadziałał, to lewy foton przeszedł przez polaryzator i tuż po tym przejściu para fotonów znajduje się w stanie  $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$  (nastąpiła redukcja wektora stanu). Redukcja ta powoduje, że stan polaryzacji fotonu lecącego w prawo również jest określony tuż po przejściu fotonu przez lewy polaryzator. Jest to zjawisko nielocalne: fotony mogą być oddalone o interwał przestrzennopodobny a mimo to pomiar wykonany na jednym z nich wpływa na stan drugiego i ten wpływ zmienia dyspozycję tego drugiego fotonu do reagowania na warunki doświadczalne. Einstein nie uznawał, tej wynikającej z formalizmu mechaniki kwantowej, możliwości wywierania natychmiastowego wpływu na oddalone układy, które nazywał upiornym oddziaływaniem na odległość. Odrzucił on taką możliwość i uznał, że jeśli możemy ustalić dokładną wartość pewnej wielkości fizycznej bez jakiegokolwiek oddziaływania, to tej wielkości odpowiada pewna realność fizyczna. W ten sposób Einstein rozumiał realizm. Za taką właśnie realność fizyczną uznałby on, w przypadku rozważanych przez nas fotonów, polaryzację fotonu biegnącego w prawo – przecież potrafimy ją określić nie wchodząc w żadne oddziaływanie z tym fotonem a skoro tak to jest ona po prostu określona cechą fotonu. Mechanika kwantowa mówi coś innego – polaryzacja fotonu biegnącego w prawo nie jest w ogóle określona dopóki nie wykonamy pomiaru na fotonie lecącym w lewo; w ten sposób Einstein doszedł do wniosku, że mechanika kwantowa nie opisuje rzeczywistości w kompletny sposób.

Wracając do opisu naszego układu: prawdopodobieństwo tego, że lewy licznik zadziała i prawy nie zadziała wynosi:  $\frac{1}{2} \left| \langle \leftrightarrow_{\theta_{AB}} | \downarrow \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \langle \downarrow | \leftrightarrow_{\theta_{AB}} \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_{AB}$ .

Analogicznie jeśli zadziała prawy licznik, to tuż po tym fakcie para fotonów znajduje się w stanie  $|\downarrow_{\theta_{AB}}\rangle|\downarrow_{\theta_{AB}}\rangle$ . Zatem prawdopodobieństwo tego, że zadziała prawy licznik i nie zadziała lewy wynosi:  $\frac{1}{2} \left| \langle \leftrightarrow_{\theta_{AB}} | \downarrow_{\theta_{AB}} \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_{AB}$ .

Podsumowując: prawdopodobieństwo tego, że liczniki lewy i prawy dadzą różne odpowiedzi wynosi:  $P(A,B) = \frac{1}{2} \left| \langle \leftrightarrow_{\theta_{AB}} | \downarrow \rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \langle \leftrightarrow_{\theta_{AB}} | \downarrow_{\theta_{AB}} \rangle \right|^2 = \sin^2 \theta_{AB}$ .

Reakcje liczników  $D_A$ ,  $D_B$  i  $D_C$  przy ustawieniu polaryzatorów w taki sposób, że ich i osie polaryzacji są równoległe do kierunków A, B, C możemy uznać za odpowiedniki odpowiedzi na pytania A, B, C występujące w opisanym grze; jeśli licznik za danym polaryzotorem zadziała to uważamy, że odpowiedź brzmi „tak” (+), w przeciwnym przypadku uważamy, że odpowiedź brzmi „nie” (-).



Wiemy już, że jeśli oś polaryzatora po lewej stronie jest ustawiona wzdłuż kierunku A i po prawej stronie wzdłuż kierunku B, to prawdopodobieństwo, że reakcje detektorów  $D_A$  i  $D_B$  będą różne wynosi  $P(A,B) = \sin^2\theta_{AB}$ . Analogicznie jeśli oś polaryzatora po lewej stronie będzie ustawiona wzdłuż kierunku B a po prawej wzdłuż kierunku C, to prawdopodobieństwo, że reakcje detektorów  $D_B$  i  $D_C$  będą różne wynosi  $P(B,C) = \sin^2\theta_{BC}$ . Podobnie jeśli oś polaryzatora po lewej stronie jest ustawiona wzdłuż kierunku A i po prawej wzdłuż kierunku C, to reakcje detektorów  $D_A$  i  $D_C$  będą różne z prawdopodobieństwem:

$$P(A,C) = \sin^2\theta_{AC}.$$

Czy dla naszych prawdopodobieństw zawsze jest spełniona nierówność Bella – Wignera  $P(A,B) + P(B,C) \geq P(A,C)$  tzn. czy  $\sin^2\theta_{AB} + \sin^2\theta_{BC} \geq \sin^2\theta_{AC}$ ? Otóż nie zawsze. **Istnieją takie kąty  $\theta_{AB}$ ,  $\theta_{BC}$  i  $\theta_{AC}$** , dla których powyższa nierówność nie zachodzi. Wybierzmy np.  $\theta_{AB} = \theta_{BC} = \pi/6$ ,  $\theta_{AC} = \pi/3$ , wtedy:  $P(A,B) = P(B,C) = 1/4$ ,  $P(A,C) = 3/4$  i **jak widzimy nierówność Bella – Wignera jest złamana** a skoro tak, to założenia realizmu i lokalności nie mogą być równocześnie spełnione. Jak widzimy występujące w stanie splątany fotony przejawiają skłonności „telepatyczne”. Jeśli odwołamy się do naszego przykładu z Alicją i Bobem, to musimy przyznać, że nie istnieje żadna strategia umożliwiająca odtworzenie sposobu zachowania się fotonów, w której nie występuje przepływ informacji między obydwojma miejscami pomiarów. Znaczyłoby to jednak, że fotony „porozumiewają się” ze sobą w sposób zabroniony przez zasadę lokalności, którą Einstein uważał za jedną z podstawowych zasad fizyki.

Doświadczenie pokazuje jednak, że między splątanymi fotonami istnieje pewien dziwny związek, którego nie dotyczą ograniczenia wynikające z zasady lokalności. Skorelowanych cząstek nie można jednak wykorzystać do natychmiastowego przekazywania informacji z jednego miejsca do drugiego. Między fotonami odbywa się jakiś przekaz informacji lecz jest to informacja do ich wewnętrznego użytku. Otoczenie nie może w żaden sposób z tej informacji skorzystać. Rzeczywiście rozważmy raz jeszcze parę fotonów występujących w stanie splątany. Załóżmy, że jeden z nich – ten biegnący na lewo znajduje się w posiadaniu Alicji, natomiast ten biegnący na prawo znajduje się w posiadaniu Boba oraz, że Alicja i Bob będą chcieli posłużyć się łączem kwantowym do przekazania sobie informacji w natychmiastowy sposób. Alicja może więc poddać swój foton pomiarowi polaryzacji przy pomocy polaryzatora ustawionego wzdłuż pewnej osi. Ponieważ fotony występują w stanie splątany, więc gdyby Bob przepuszczał swój foton przez polaryzator z osią ustawioną tak samo jak w przypadku

polaryzatora Alicji, to rezultat byłby taki sam w obu przypadkach; tzn. albo obydwa fotony by przeszły albo obydwa zostałyby pochłonięte. Cóż jednak z tego skoro Bob nie wie w jakim kierunku Alicja ustawiła oś swojego polaryzatora. A nawet wtedy gdyby Alicja i Bob wcześniej umówili się, że będą mierzyć polaryzację wzdłuż danego kierunku, to i tak Bob nie ma możliwości ustalenia czy Alicja dokonała pomiaru czy nie. Bob może przepuścić swój foton przez polaryzator lecz otrzyma zaledwie jedną z dwóch możliwych odpowiedzi: foton albo przejdzie, albo nie. Bob nie może rozstrzygnąć czy otrzymał takie wyniki dlatego, że wcześniej podobne wyniki otrzymała Alicja, czy też po prostu dlatego, że losowo została wybrana jedna z dwóch możliwości. Zatem zachowanie pojedynczego fotonu jest jakościowo takie samo niezależnie od tego czy drugi foton został poddany pomiarowi czy nie.

Różnica między sytuacją gdy Alicja dokonała pomiaru na fotonie a sytuacją w której taki pomiar nie miał miejsca ujawnia się nie w indywidualnym zachowaniu się fotonu Boba lecz w zachowaniu grupowym rejestrowanych przez Boba fotonów. O splątaniu fotonów Alicja i Bob mogą się dowiedzieć dopiero post factum, kiedy prześlą sobie wyniki pomiarów w celu ich porównania. Natychmiastowe przesyłanie informacji, z wykorzystaniem cząstek występujących w stanie splątanim, byłoby możliwe gdybyśmy potrafili powielać stany cząstek kwantowych, tzn. tworzyć dowolną liczbę kopii stanów danej cząstki bez niszczenia stanu wyjściowego tejże cząstki. Wyobraźmy sobie mianowicie, że Bob może sklonować dowolną liczbę egzemplarzy fotonu którym dysponuje w określonym stanie polaryzacji. W tej sytuacji otrzymaną wiązkę fotonów będących w tym samym stanie polaryzacji mógłby on przepuścić przez polaryzator z osią ustawioną wzdłuż ustalonego kierunku. Gdyby się okazało, że wszystkie fotony przeszły (lub, że wszystkie zostały pochłonięte) Bob miałby pewność, że Alicja dokonała właśnie pomiaru polaryzacji swojego fotonu wzdłuż tej wybranej osi. Jest tak dlatego, że przed pomiarem poszczególne fotony są w stanie całkowitego niespolaryzowania, co oznacza, że połowa z nich powinna przejść przez dowolnie ustawiony polaryzator a połowa powinna zostać pochłonięta. Jeśli tak się nie dzieje, to Alicja na pewno dokonała pomiaru polaryzacji na swoim fotonie. Bob uzyskałby zatem pewną fizyczną informację od Alicji w sposób niemal natychmiastowy. Niestety na przeszkodzie stoi twierdzenie o niemożności klonowania. Głosi ono, że nie można utworzyć kopii **nieznanego** stanu kwantowego bez zniszczenia tego stanu.





## Sprzeczność GHZ

Przez wiele lat wszyscy myśleli, że Bell wyczerpał temat rozważywszy wszystkie naprawdę interesujące sytuacje i że układ dwóch cząstek ze spinem jest przykładem najbardziej spektakularnego łamania lokalnego realizmu. Nic zatem dziwnego, że dla wielu było wielkim zaskoczeniem, gdy w 1989 Greenberger, Horne i Zeilinger (GHZ) pokazali, iż układ złożony z większej ilości skorelowanych cząstek może w jeszcze bardziej dramatyczny sposób łamać zasady lokalnego realizmu<sup>1</sup>. Odkryli oni 100% niezgodność znaków dla idealnej korelacji, podczas gdy nierówności BCHSH są łamane jedynie w około 40% (granica Cirelsona) i w tym przypadku wyniki pomiarów nie są całkowicie skorelowane. Rozważymy teraz układy złożone z trzech cząstek a następnie przedstawimy uogólnienie do układu złożonego z N cząstek.

## Wyprowadzenie

Sprzeczność GHZ może występować w wielu układach również w takich które nie posiadają spinu. Początkowo była ona odkryta w kontekście wymiany splątania (entanglement swapping) dla czterech cząstek bezspinowych występujących w stanie splątanym. Tutaj, zgodnie z sugestią Mermina<sup>2</sup>, będziemy rozważać układ złożony z trzech cząstek o spinie 1/2, ponieważ ten prosty przykład pozwala przedyskutować podstawowe idee. Zakładamy, że trzy cząstki znajdują się w stanie spinowym:

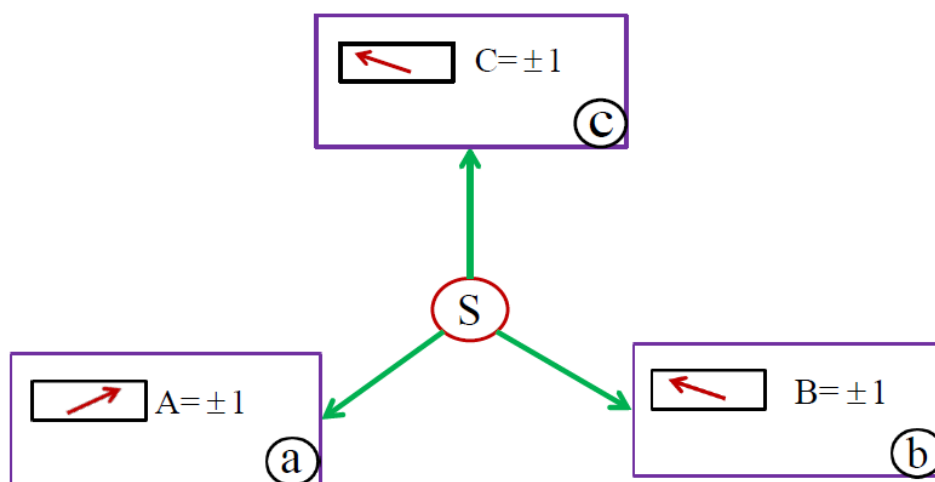
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+,+\rangle + \eta|-, -, -\rangle),$$

gdzie stany  $|\pm\rangle$  są stanami własnymi składowych spinu wzdłuż kierunku wyznaczonego przez oś Oz ortogonalnego układu współrzędnych Oxyz – w ket wektorze opisującym stan

<sup>1</sup> D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger w „Bell’s Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe”, M. Kafatos editor, Kluwer (69 – 72) (1989); D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger “Bell’s theorem without inequalities”, Am. J. Phys. **58**, 1131 – 1143 (1990).

<sup>2</sup> N. D. Mermin, „Quantum mysteries revisited”, Am. J. Phys. **58**, 731 – 732 (1990).

spinowy trzech cząstek pierwszy znak odnosi się do spinu pierwszej cząstki, drugi do spinu drugiej cząstki i trzeci do spinu trzeciej, liczba  $\eta$  może przyjmować wartości  $+1$  lub  $-1$  ( $\eta = \pm 1$ ). Teraz wyznaczmy prawdopodobieństwa otrzymania różnych wyników jakie możemy otrzymać mierząc spiny  $\sigma_{1,2,3}$  trzech cząstek w różnych kierunkach tzn. albo wzdłuż kierunku Ox albo wzdłuż kierunku prostopadłego Oy. Najpierw rozważymy pomiar wielkości, której odpowiada operator  $\hat{\sigma}_{1y} \otimes \hat{\sigma}_{2y} \otimes \hat{\sigma}_{3x}$ . Ponieważ  $\hat{\sigma}_x = |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|$ ,  $\hat{\sigma}_y = -i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|$ ,  $\hat{\sigma}_z = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$ , więc  $\hat{\sigma}_x|+\rangle = |-\rangle$ ,  $\hat{\sigma}_x|-\rangle = |+\rangle$ ;  $\hat{\sigma}_y|+\rangle = i|-\rangle$ ,  $\hat{\sigma}_y|-\rangle = -i|+\rangle$  oraz  $\hat{\sigma}_z|+\rangle = |+\rangle$ ,  $\hat{\sigma}_z|-\rangle = |-\rangle$ .



Schemat eksperymentu GHZ, w którym trzy cząstki w stanie spinowym

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+,+\rangle + \eta|-,,-,\rangle)$  są poddawane pomiarom w trzech różnych obszarach przestrzeni dostarczając wyników:  $A = \pm 1$ ,  $B = \pm 1$ ,  $C = \pm 1$ .

A zatem:

$$\hat{\sigma}_{1y} \otimes \hat{\sigma}_{2y} \otimes \hat{\sigma}_{3x} |\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|-,,-,\rangle + \eta|+,+,+\rangle) = -\eta \frac{1}{\sqrt{2}}(|-,,-,\rangle + \eta|+,+,+\rangle) = -\eta |\psi\rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że  $\eta\eta = 1$ . Czyli stan  $|\psi\rangle$  jest stanem własnym obserwabli

$$\hat{\sigma}_{1y} \otimes \hat{\sigma}_{2y} \otimes \hat{\sigma}_{3x}$$
 do wartości własnej  $-\eta$ . Zatem prawdopodobieństwo  $\mathcal{P}_{\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}}(-\eta|\psi\rangle)$

otrzymania wyniku  $-\eta$  w pomiarze przeprowadzonym na układzie znajdującym się w stanie  $|\psi\rangle$  wynosi jeden tzn.  $\mathcal{P}_{\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}}(-\eta|\psi\rangle) = 1$ , natomiast prawdopodobieństwo otrzymania innego

możliwego wyniku  $\mathcal{P}_{\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}}(+\eta|\psi\rangle) = 0$  jest równe zero. W analogiczny sposób możemy się

przekonać, że stan  $|\psi\rangle$  jest stanem własnym operatorów  $\hat{\sigma}_{1x} \otimes \hat{\sigma}_{2y} \otimes \hat{\sigma}_{3y}$  i  $\hat{\sigma}_{1y} \otimes \hat{\sigma}_{2x} \otimes \hat{\sigma}_{3y}$  do wartości własnej  $-\eta$ . Zatem odpowiednie prawdopodobieństwa przyjmują wartości:

$\mathcal{P}_{\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}}(-\eta|\psi) = \mathcal{P}_{\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y}}(-\eta|\psi) = 1$ . Widzimy więc, że iloczyny wszystkich omówionych wielkości mają z całą pewnością dobrze określoną wartość równą  $-\eta$  zanim wykonamy jakikolwiek pomiar<sup>3</sup>. Rozważmy następnie obserwabłą będącą iloczynem x-owych składowych tzn.  $\hat{\sigma}_{1x} \otimes \hat{\sigma}_{2x} \otimes \hat{\sigma}_{3x}$ . Łatwo możemy się przekonać, że tym razem wektor  $|\psi\rangle$  jest wektorem własnym tej obserwabli do wartości własnej  $+\eta$  tzn.  $\hat{\sigma}_{1x} \otimes \hat{\sigma}_{2x} \otimes \hat{\sigma}_{3x} |\psi\rangle = +\eta |\psi\rangle$  a zatem:  $\mathcal{P}_{\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}}(+\eta|\psi) = 1$ . Tym razem mierząc wartość iloczynu obserwabli  $\hat{\sigma}_{1x} \otimes \hat{\sigma}_{2x} \otimes \hat{\sigma}_{3x}$  otrzymamy wynik  $+\eta$  z całkowitą pewnością.

Spróbujmy teraz przeanalizować opisaną sytuację zakładając, że są spełnione postulaty lokalnego realizmu. Ponieważ obliczenia kwantowe, w przypadku gdy mamy do czynienia ze stanem własnym wszystkich rozważanych obserwabli, są niezwykle proste, więc mogłoby się wydawać, iż nie czeka nas żadna niespodzianka. Jak się jednak przekonamy z przeprowadzonej analizy wyniknie jawna sprzeczność! Rozważania oparte na założeniach lokalnego realizmu są prostym uogólnieniem tych jakie przeprowadziliśmy wyprowadzając nierówności Bella. Przede wszystkim konsekwencją dokładnej korelacji jest to, że wynik pomiaru składowej spinu cząstki wzdłuż Ox (lub Oy) można wydedukować ze znajomości wyników pomiaru spinu przeprowadzonych na innych cząstkach znajdujących się dowolnie daleko. Z tego powodu argumentacja oparta na założeniach realizmu lokalnego typu EPR pokazuje, że istnieją elementy rzeczywistości odpowiadające tym dwu składowym, które oznaczymy przez  $A_{x,y} = \pm 1$ . Liczba ta jest rezultatem jaki otrzymamy dokonując pomiaru spinu pierwszej cząstki wzdłuż osi Ox lub Oy, niezależnie od typu pomiaru wykonanego na dwóch pozostałych spinach, analogicznie liter B i C używamy w celu oznaczenia wyników pomiarów dokonanych na spinach dwóch pozostałych cząstek. Ponieważ :

$$\mathcal{P}_{\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}}(-\eta|\psi) = \mathcal{P}_{\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}}(-\eta|\psi) = \mathcal{P}_{\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y}}(-\eta|\psi) = 1,$$

więc:  $A_y B_y C_x = A_x B_y C_y = A_y B_x C_y = -\eta$ . Następnie założenie lokalności implikuje, że te same wartości zmiennych A, B i C możemy wykorzystać w przypadku, gdy dokonujemy pomiaru wzdłuż osi Ox spinów wszystkich trzech cząstek. Tym razem iloczyn  $A_x B_x C_x$  musi spełniać

równość  $A_x B_x C_x = +\eta$ . Jednak z uwagi na to, że  $(A_y)^2 = (B_y)^2 = (C_y)^2 = \eta^2 = +1$  po wymnożeniu przez siebie równości  $A_y B_y C_x = A_x B_y C_y = A_y B_x C_y = -\eta$  otrzymamy

$A_x B_x C_x = -\eta$ . Tymczasem równość  $\mathcal{P}_{\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}}(+\eta|\psi) = 1$  mówi, że dokonując pomiaru obserwabli  $\hat{\sigma}_{1x} \otimes \hat{\sigma}_{2x} \otimes \hat{\sigma}_{3x}$  zawsze otrzymamy wartość  $+\eta$  a więc rezultat ze znakiem

przeciwnym do tego jaki wynika z argumentacji EPR. Sprzeczność między przewidywaniami lokalnego realizmu oraz przewidywaniami mechaniki kwantowej jest ewidentna.

## Dyskusja

Sprzeczność GHZ wygląda jeszcze bardziej dramatycznie niż ta, która jest związana z nierównościami Bella, gdyż przewidywania kwantowe i te oparte na lokalnym realizmie

<sup>3</sup> Wartość iloczynu jest ustalona chociaż wartość każdej z pojedynczych składowych może fluktuować przyjmując wartości +1 albo -1.

różnią się nie tylko o pewien znaczący ułamek (około 40%) lecz są zupełnie różne. W eksperymencie myślowym wyeliminowane są wszelkie możliwe fluktuacje gdyż wszystkie wyniki (iloczynów trzech składowych) są dokładnie znane przed pomiarem: 100% sprzeczność występuje ze 100% pewnością ! Zapytajmy co poza tym różni eksperyment GHZ od zwykłego eksperymentu Bella z dwoma spinami ? Możliwe są tutaj różne punkty widzenia.

W jednym z możliwych podejść zakłada się, że trzy spiny są mierzone indywidualnie w każdej realizacji doświadczenia. Trzy cząstki ze swoimi spinami mogą się znajdować w różnych obszarach przestrzeni; jeśli uwzględnimy zmienne przestrzenne wówczas stan

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+,+\rangle + \eta|-, -,-\rangle)$  trzeba zastąpić wektorem stanu

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1:\varphi_a\rangle|2:\varphi_b\rangle|3:\varphi_c\rangle \otimes (|1:+,2:+,3:+\rangle + \eta|1:-,2:-,3:-\rangle),$$

gdzie stany  $|\varphi_{a,b,c}\rangle$  są trzema orbitalnymi funkcjami falowymi, które są różne od zera na rozłącznych obszarach przestrzeni. Obszary w których te funkcje nie znikają można całkowicie zlokalizować w rozłącznych pudłach, w których wykonywany jest pomiar spinu – w ten sposób żadna cząstka nie może być pominięta i każda jest traktowana indywidualnie. Sposób postępowania jest następujący: po wyborze składowych  $O_x$  lub  $O_y$  dla każdego spinu wykonujemy trzy odpowiednie pomiary, otrzymując wyniki  $A_{x,y}$ ,  $B_{x,y}$  i  $C_{x,y}$  a następnie wyznaczamy iloczyn tych wielkości. Uśrednienie po wielu realizacjach eksperymentu pozwala wyznaczyć wartość średnią  $\langle A_{x,y} B_{x,y} C_{x,y} \rangle$ . Przy pomocy tej procedury najpierw wyznaczamy wartości średnie  $\langle A_y B_y C_x \rangle$ ,  $\langle A_x B_y C_y \rangle$  i  $\langle A_y B_x C_y \rangle$  aby sprawdzić występowanie dokładnych korelacji przewidywanych przez mechanikę kwantową. Mając te wielkości wykorzystując argumentację EPR przekonujemy się o istnieniu sześciu oddzielnych elementów rzeczywistości. Następnie mierzymy wielkość  $\langle A_x B_x C_x \rangle$  i, jeśli mechanika kwantowa dostarcza poprawnych odpowiedzi, otrzymujemy wynik z przeciwnym znakiem z czego wynika, że realizm lokalny jest łamany. Równoważnie możemy wnioskować, że wartość jaką otrzymamy mierząc przykładowo składową  $\hat{\sigma}_{1x}$  zależy od tego czy składowe spinu mierzone na pozostałych cząstkach są wybrane wzdłuż  $O_x$  czy wzdłuż  $O_y$  nawet jeśli odpowiednie operatory komutują z  $\hat{\sigma}_{1x}$ . W ten sposób natrafiamy na pojęcie, które nazywamy „kwantową kontekstowością” (quantum contextuality), o którą omówimy nieco później.

Zgodnie z innym punktem widzenia można wyznaczyć pewne procedury pomiarowe, które pozwalają na bezpośredni pomiar iloczynów odpowiednich obserwabli, bez uzyskiwania informacji o wartościach poszczególnych czynników występujących w iloczynach. Wszystkie cztery operatory będące iloczynami komutują wzajemnie ze sobą co jest dodatkową różnicą koncepcyjną w porównaniu z łamaniem nierówności Bella, gdzie brak komutacji ma podstawowe znaczenie. Tym razem, przynajmniej w zasadzie, nie ma żadnego zakazu uniemożliwiającego pomiar wszystkich tych obserwabli przy jednym ustawieniu eksperymentalnym i Bohr nie miałby teraz możliwości odwoływania się do niezgodności przyrządów pomiarowych. Czy przy tych założeniach istnieje sprzeczność pomiędzy argumentacją lokalnego realizmu i mechaniką kwantową? Podczas gdy, zgodnie z realizmem

lokalnym, pomiar iloczynu trzech obserwabli jest równoważny z oddzielnym pomiarem każdej z tych obserwabli, w mechanice kwantowej tak nie jest. W mechanice kwantowej istnieje możliwość skonstruowania (przynajmniej w zasadzie) takiej aparatury pomiarowej, która mogłaby wyznaczać wartości wszystkich iloczynów obserwabli lecz nie ma możliwości skonstruowania takiego urządzenia, które miałoby dostęp do wszystkich sześciu pojedynczych czynników  $A_{x,y}$ ,  $B_{x,y}$  i  $C_{x,y}$  (ponieważ przykładowo wielkości  $A_x$  i  $A_y$  odpowiadają dwu niezgodnym pomiarom). Tym co łamie mechanika kwantowa jest „reguła iloczynu” (product rule).

Idealny eksperyment GHZ powinien zatem wprowadzać jedynie pomiary komutujących iloczynów a dokładniej jednoczesny pomiar czterech iloczynów (bez oddzielnego mierzenia każdego czynnika iloczynu). Piękno tej możliwości teoretycznej polega na tym, że wówczas w ogóle nie pojawia się luka „nieuczciwej próbki”. Z drugiej strony pomiar iloczynów obserwabli bez mierzenia wartości poszczególnych czynników jest prawdziwym wyzwaniem eksperymentalnym.

Nawet wtedy, gdy dopuszczamy pomiar pojedynczych obserwabli trzy cząstki muszą się znajdować w stanie spinowym  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+,+\rangle + \eta|-, -,-\rangle)$  a otrzymanie takiego stanu jest zadaniem naprawdę niebanalnym. Na szczęście dzięki zastosowaniu skomplikowanych technik elektroniki kwantowej udało się zaobserwować splątanie typu GHZ dla trzech fotonów, co pozwoliło na przeprowadzenie doświadczenia zakończonego powodzeniem, w którym wykazano istnienie nielokalności GHZ.

